Uitwerkingen Tentamen Wiskunde VI, Do 26/11/92

1 (i) De funktie $h(z) = \frac{2\pi}{z} + \frac{\sin \pi z}{z-1}$ voldoet aan (1), (2).
$\Rightarrow f(z)-h(z)$ is in $z=0$, $z=1$ voortzetbaar tot een analytische funktie en dus overal analytisch. Uit (3) volgt dat $f(z)-h(z)$ begrensd is $\Rightarrow$ (St. van Liouville) $f(z)-h(z) = \text{const.} = 0$, weer wegens (3). Dus $f(z)=h(z)$.

(ii) Noem $k(z) = \begin{cases} \frac{g(z)-g(0)}{z}, & z \neq 0 \\ g'(0) & z=0 \end{cases}$, dan is $k(z)$ anal op $|z|<3$.

Op $|z|=2$: $|k(z)| = \left|\frac{g(z)-g(0)}{z}\right| \le \frac{|g(z)|+|g(0)|}{|z|} \le \frac{1+1}{2} = 1$ Max. mod pr.

$\Rightarrow |k(z)| \le 1$ ook op $|z|<2 \Rightarrow |g(z)-g(0)| \le |z|$. Dus (a) geldt

(b) $k(0)=1 \Rightarrow$ max mod wordt in inwendig punt aangenomen
$\Rightarrow k(z) = \text{constante} = k(0) = 1$ op $|z| \le 2$. Volgens identiteitsstelling

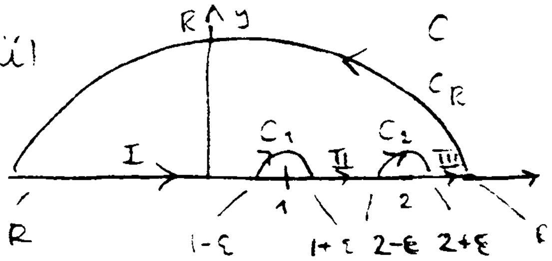
geldt $k(z)=1$ op $|z|<3$ ofwel $g(z) = g(0) + z$.

2 (i) $\frac{1}{e^z-(1+z)}$ heeft in $z=0$ pool orde 2. Residu $= \left(\frac{z^2}{e^z-(1+z)}\right)'\Big|_{z\to 0}$

$$= \frac{2z(e^z-(1+z)) - z^2(e^z-1)}{(e^z-(1+z))^2}\Big|_{z\to 0} = \frac{2z(\cancel{\frac{z^2}{2!}}+\frac{z^3}{3!}+\cdots) - z^2(\cancel{\frac{z}{1}}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)}{z^4(\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{3!}-\frac{1}{2!}}{(\frac{1}{2!})^2} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

(ii)



Residuenst $\Rightarrow \int_C \frac{e^{\pi i z}\,dz}{(z-1)(z-2)} = 0$ (geen sing.!)

$\int_C = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_R}$

$\int_I + \int_{II} + \int_{III} = \int_{-R}^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{2-\varepsilon} + \int_{2+\varepsilon}^{R} \frac{e^{\pi i x}}{(x-1)(x-2)}\,dx$,

$\int_{C_1} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} -\pi i \,\mathrm{Res}_{z=1} = -\pi i \frac{e^{\pi i}}{1-2} = -\pi i$, $\int_{C_2} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} -\pi i \,\mathrm{Res}_{z=2} = -\pi i \frac{e^{2\pi i}}{2-1} = -\pi i$

$\left|\int_{C_R}\right| \underset{z=Re^{i\varphi}}{=} \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{\pi i R e^{i\varphi}}\, R i e^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi}-1)(Re^{i\varphi}-2)}\,d\varphi\right| \le \int_0^{\pi} \frac{e^{-\pi R \sin\varphi} R}{(R-1)(R-2)}\,d\varphi$ ($\sin\varphi \ge 0$ op $[0,\pi]$)

$\le \int_0^{\pi} \frac{R}{(R-1)(R-2)}\,d\varphi = \frac{\pi R}{(R-1)(R-2)} \to 0$, $R \to \infty$

Dus geldt PV $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i z}}{(z-1)(z-2)}\,dz = 2\pi i$. Neem Imaginaire delen

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{(x-1)(x-2)}\,dx = 2\pi$.

3 (i) Schrijf de differentiaalvergelijking als $w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0$, $p(z) = \frac{-2z}{1-z^2}$
$q(z) = -1/4/(1-z^2)$
$z=-1$: $(z+1)p(z) \to 1$, $(z+1)^2 q(z) \to 0$ als $z \to -1$: $\alpha(\alpha-1)+\alpha+0=0 \Rightarrow \alpha_{1,2}=0$
$z=+1$: $(z-1)p(z) \to 1$, $(z-1)^2 q(z) \to 0$ als $z \to 1$: $\beta(\beta-1)+\beta+0=0 \Rightarrow \beta_{1,2}=0$
$z=\infty$: $z p(z) \to 2$, $z^2 q(z) \to 1/4$ als $z \to \infty$: $\gamma(\gamma-1)+(2-2)\gamma+\frac{1}{4} \Rightarrow \gamma_{1,2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ 3 reg. sing en dus een Riemann differentiaalvergelijking, ...